

# **Datenfenster und deren Wirkung in der spektralen Varianzanalyse geophysikalischer Meßreihen**

**H.-J. Schönfeldt und S. von Löwis**

## **Zusammenfassung**

Die ständig steigende Rechenleistung von PCs und Workstations ermöglicht es, die spektralen Varianzen direkt durch Fouriertransformation einer Zeitreihe zu schätzen. Dabei ist ein geeignetes Fenster auszuwählen. Die Nichtbeachtung dieser Tatsache führt zwangsläufig zum Rechteckfenster und zum Verschmieren der Information über den ganzen Spektralbereich. Von den hier untersuchten Fenstern hat das Hanning-Fenster die besten Eigenschaften mit dem stärksten Abfall im benachbarten Frequenzbereich.

Analog der Fensterung von Auto- und Kreuzkorrelationsfunktion im Frequenzraum wird das Hanning-Fenster für die Fouriertransformation einer Meßreihe im Frequenzraum angegeben.

## **Summary**

Due to the permanent grow in PC and workstation power it is possible to estimate the spectral variances directly by the Fourier transform of a time series. Thereby one has to choose an appropriate data window. Ignoring this leads to an unsuited square window function where the spectral power in one frequency bin contains leakage from frequency components that are bins away. From the window functions we tested here, the Hanning window has best properties with minimum leakage. Analogous to windowing of the auto- and crosscorrelation function in the frequency domain we give also the Hanning window for the Fourier transform of time series in the frequency domain.

## **1. Einleitung**

Die spektrale Varianzanalyse ist ein fundamentales Werkzeug bei der Datenanalyse in den geophysikalischen Disziplinen, insbesondere in der Meteorologie. Die Bedeutung der Fensterfunktion wird dabei aber meist vernachlässigt. Bei der allgemeinen Verfügbarkeit leistungstarker Rechner, ergibt sich die Möglichkeit, die Leistungsspektren direkt aus den Daten durch Anwendung von Programmbibliotheken zur Fouriertransformation und nicht über die Auto- und Kreuzkorrelationsfunktion zu gewinnen. Hierbei sind grundlegende Überlegungen in den Hintergrund getreten, wobei nach dem Wiener-Chintschin-Theorem (Taubenheim, 1969, S. 224) für einen Gaußschen Zufallsprozeß beide Betrachtungsweisen äquivalent sind. Bei Press et al. (1992, S. 545 ff.) werden einige Fenster vorgestellt. Bei der Anwendung dieser Fenster ist ihre Wirkung auf reine Sinusschwingungen mit zufälliger Frequenz und Phase entscheidend, denn jede Realisierung einer Zufallsgröße läßt sich aus solchen Schwingungen darstellen.

In der spektralen Varianzanalyse berechnet man den Erwartungswert einer statistischen Größe aus unendlich vielen Realisierungen oder unendlich langen Reihen. Geophysikalische Meßreihen haben prinzipiell eine endliche Länge. Diese endliche Länge der Meßreihe führt bei der spektralen Varianzanalyse dazu, daß die Meßreihe durch ein Fenster betrachtet wird. Außerhalb des Beobachtungszeitraums sind die Werte der untersuchten Größe unbekannt und

werden deshalb zu Null gesetzt. Das Fenster  $D(\xi)$  hat somit die Form:  $D(\xi)=1$  im Meßintervall und sonst  $D(\xi)=0$ , wobei  $\xi$  eine Ortskoordinate oder die Zeit ist (s.u.).

Die so gewonnene Fouriertransformierte der Meßreihe impliziert eine Periodizität des Prozesses:  $M(\xi)=M(\xi+L)$ , wenn wir mit  $M$  den Meßwert bezeichnen und  $L$  die Länge des Datensatzes ist. Diese Periodizität ist in den Daten im allgemeinen nicht vorhanden, Anfangswert und Endwert der Registrierung gehen nicht stetig ineinander über. Dieser „Sprung“ im Datensatz führt zu Spektralwerten auf allen Frequenzen (Wellenlängen), die nur diesen „Sprung“ abbilden, aber nicht wirklich im Prozeß vorhanden sind (‘leakage-Effekt‘). Dies hat dazu geführt, daß Fensterfunktionen benutzt wurden, die die Daten an den Enden (jeweils 10% der Meßreihe) mit einer stetig von eins gegen Null gehenden Funktion multipliziert (vgl. Hamming, 1977, S. 226; Stull, 1988, S. 310). Hiermit erreicht man, daß Stetigkeit bei jeder dieser Meßreihe erreicht wird und der Datenverlust klein gehalten wird.

Im folgenden vergleichen wir die Eigenschaften dieses geglätteten Rechteckfensters mit denen des Hanning-Fensters, des Sinusfensters und des Rechteckfensters (das jeder Anwender benutzt, der keine Fensterfunktion verwendet). Analog der Fensterung von Auto- und Kreuzkorrelationsfunktion im Frequenzraum (Taubenheim, 1969, S. 291, Schönwiese, 1992, S. 180) wird das Hanning-Fenster für die Fouriertransformation einer Meßreihe im Frequenzraum angegeben.

## 2. Die empirische Bestimmung von Energiespektren

Wir wollen der Einfachheit halber von einer Zeitfunktion und deren Transformation in den Frequenzraum sprechen, für eine ortsabhängige Variable lassen sich diese Überlegungen analog durchführen, wobei z.B. Meßwerte, die sich über die ganze Erde erstrecken, eine Ausnahme bilden, da hier die Periodizität gegeben ist. Das Energiespektrum einer geophysikalischen Größe  $M(t)$  ist

$$P'(v) = Am'(v)Am'(v)^* \text{ mit } Am'(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(t)e^{i2\pi v t} dt, \quad (1)$$

wobei  $t$  die Zeit und die  $v$  die Frequenz ist. Der Stern steht für den konjugiert komplexen Wert. Die gemessenen Daten sind nur im Meßintervall  $\{0,T\}$  vorhanden, somit ist der Erwartungswert des Energiespektrums

$$E\{P'(v)\} = P(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} D(t)M(t)e^{i2\pi v t} dt \left( \int_{-\infty}^{+\infty} D(t)M(t)e^{i2\pi v t} dt \right)^*, \quad (2)$$

mit

$$\begin{aligned} D(t) &= 1, \quad \text{für } 0 \leq t \leq T, \\ D(t) &= 0, \quad \text{sonst.} \end{aligned} \quad (3)$$

Dieses Fenster wird als Rechteckfenster bezeichnet.

Gleichung (2) beinhaltet ein Faltungsintegral, daß sich durch die Fouriertransformierte von  $D(t)$  und von  $M(t)$  ausdrücken läßt. Die Fouriertransformierte von  $D(t)$  bezeichnen wir mit  $Q(v)$ , und die von  $M(t)$  ist das Amplitudenspektrum  $Am(v)$ .

$$E\{P'(v)\} = P(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(v-v')Am(v')dv' \left( \int_{-\infty}^{+\infty} Q(v-v')Am(v')dv' \right)^*. \quad (4)$$

Gleichung (4) läßt sich durch Zusammenfassen der Integrale weiter vereinfachen. Der in der Diskussion vorgeschlagene Algorithmus für eine vollständige Analyse mehrerer Zeitreihen, ist in Form von Gleichung (4) am einfachsten zu programmieren. Wir werden hier die Eigenschaften des Rechteckfensters an konkreten Eingangsdaten diskutieren und mit anderen Fenstern vergleichen. Die Fouriertransformierte von  $D(t)$ ,  $Q(v)$ , ist bei Taubenheim (1969, S. 262) ausführlich diskutiert. Idealerweise wäre  $Q(0)=1$  und sonst Null. Dies ergibt sich nur im Fall unendlich langer Meßreihen, die aber real nicht existieren. Deswegen erscheinen die Energiedichten aus den Nachbarfrequenzbereichen im untersuchten Frequenzbereich.

$Q(v)$  hat die Form einer Spaltfunktion  $\frac{\sin x}{x}$  und hat neben der endlichen Durchlaßbreite noch

Nebenzipfel. Um diese Nebenzipfel zu dämpfen und die Durchlaßbreite zu optimieren, wendet man andere Filter als das in Gleichung (3) an. Es sei noch mal betont, daß bei der spektralen Varianzanalyse ohne Filterung, automatisch das Fenster nach Gleichung (3) angewendet wird und es somit, je nach Periodizität der Meßdaten, zu einem „Verschmieren“ der Spektralwerte über die angrenzenden oder im schlechtesten Fall über alle Frequenzen kommt, so daß das eigentliche Energiespektrum der Daten nicht mehr erkannt werden kann.

### 3. Betrachtete Fensterfunktionen

Die im folgenden vorgestellten Fensterfunktionen sind in Abb.1 dargestellt.

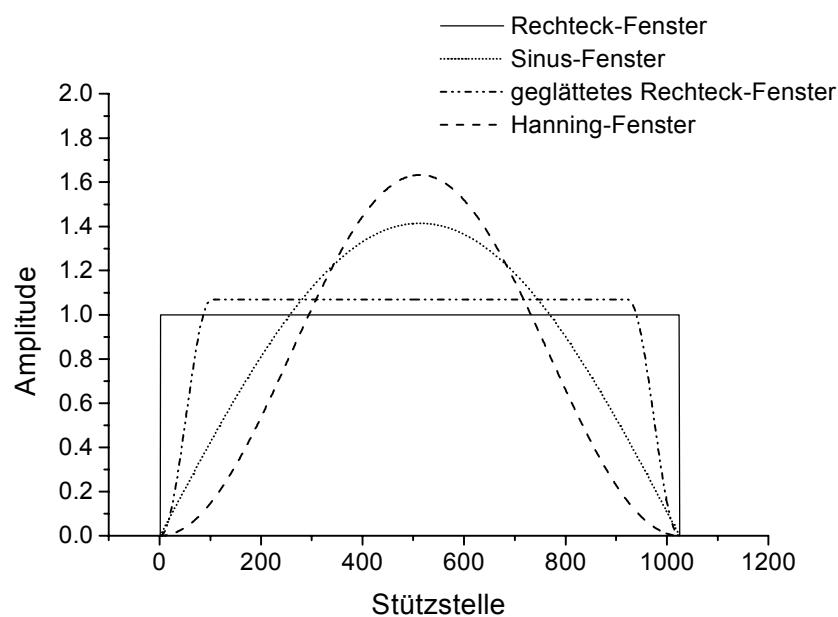


Abb.1 In der spektralen Varianzanalyse untersuchte, normierte (quadratische gemittelte) Fensterfunktionen

Eine oben bereits erwähnte mögliche Fensterform ist die, bei der die Periodizität der Daten durch Multiplikation der Datenreihe an den Enden (jeweils 10% der Meßreihe) mit einer stetig von Null gegen Eins (am Anfang der Datenreihe) bzw. von Eins gegen Null (am Ende der Datenreihe) gehenden Funktion erzwungen wird. Ein solches Fenster kann folgendermaßen gebildet werden (Hamming, 1977, S. 226):

$$\begin{aligned}
D(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{10\pi t}{T}\right)\right) && \text{für } 0 \leq t \leq T/10, \\
D(t) &= 1, && \text{für } T/10 < t < 9T/10, \\
D(t) &= \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{10\pi(T-t)}{T}\right)\right) && \text{für } T - T/10 \leq t \leq T, \\
D(t) &= 0, && \text{sonst.}
\end{aligned} \tag{5}$$

Wegen der Form nennen wir dieses Fenster geglättetes Rechteckfenster. Ein ähnliches Fenster, aber mit einer anderen Funktion an den Datenenden, findet man bei Stull (1988, S. 310).

Außerdem haben wir ein Sinusfenster

$$\begin{aligned}
D(t) &= \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), && \text{für } 0 \leq t \leq T, \\
D(t) &= 0, && \text{sonst,}
\end{aligned} \tag{6}$$

und ein Hanning-Fenster untersucht

$$\begin{aligned}
D(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right), && \text{für } 0 \leq t \leq T, \\
D(t) &= 0, && \text{sonst.}
\end{aligned} \tag{7}$$

Daneben gibt es noch eine Vielzahl weiterer Fenster (vgl. Press et al., 1992, S. 546).

#### 4. Untersuchte synthetische Reihen

Eine stationäre geophysikalische Meßreihe ist in der Regel durch einen stochastischen Gaußschen Zufallsprozeß beschreibbar (s.a. Taubenheim, 1969, S. 200 ff.). Es sind demnach unendlich viele Frequenzen in diesem Prozeß enthalten. Die reale Zeitreihe besitzt neben den kontinuierlichen Spektralbereichen auch Energielücken (z.B. Windspektrum) oder bevorzugte Frequenzen (Tagesgang, Jahresgang) oder auch erhöhte Energiedichten mit vorläufig unbekannten Frequenzen und Phasenlagen. Darum betrachten wir nicht die Fenstereigenschaften bei diskreten Frequenzen (das sind Vielfache der Nyquist-Frequenz  $f_N = 1/2\Delta t$ , mit  $\Delta t$  als dem Digitalisierungsschritt der Zeitreihe), sondern bei zufälligen Frequenzen und zufälligen Phasenlagen.

Wir stellen uns jetzt die Frage: Wie wird eine Sinusschwingung mit zufälliger Phasenlage im Meßintervall  $\{0, T\}$  und beliebiger Frequenz im Spektrum abgebildet? Wie muß das Fenster beschaffen sein, damit die Energie im gesamten Spektrum außerhalb der beiden benachbarten Frequenzen, die die Schwingung repräsentieren, minimal wird?

Die Testfunktion hat folgende Form

$$M(t) = \sin\left(2\pi\left(\frac{i + R_1}{T}t + R_2\right)\right) \quad \text{mit } 0 \leq R_{1,2} \leq 1, \text{ (Zufallszahlen),} \tag{8}$$

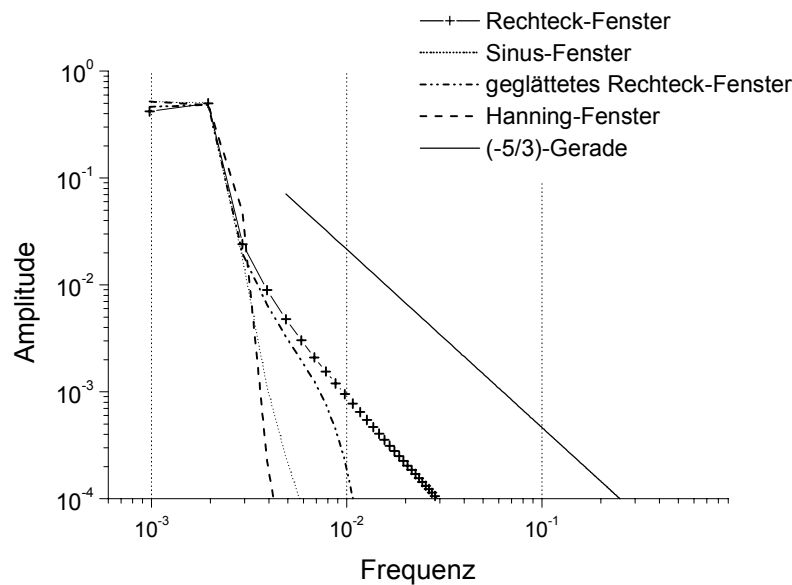
wobei  $i < T/2$  und ganzzahlig ist.

Bei jeder Phasenlage liefert ein Fenster einen anderen Filterwert. Deshalb haben wir 100 zufällige Sinus-Reihen mit jeweils gleichem  $i$ , aber unterschiedlichem  $R_1$  und  $R_2$ , erzeugt und fouriertransformiert. Das bedeutet, daß die Testfunktion eine reine Sinusschwingung, mit zufälliger Phasenlage und einer zufälligen Frequenz, die auf oder zwischen den beiden Frequenzbins  $i$  und  $i+1$  liegt, ist. Die Fouriertansformierten wurden nach Gleichung (2) berechnet, aufsummiert und anschließend gemittelt. Auf den Frequenzbins  $i$  und  $i+1$  wird an-

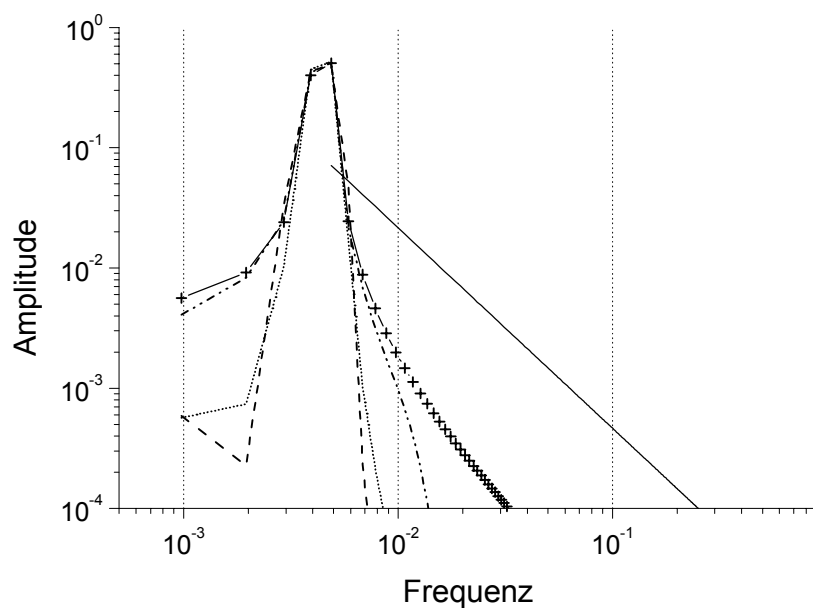
nähernd die gleiche Energie (Leistung) erwartet. Der Abfall der Leistung nach beiden Seiten ist somit ein Maß für die „Güte“ des Fensters.

## 5. Ergebnisse

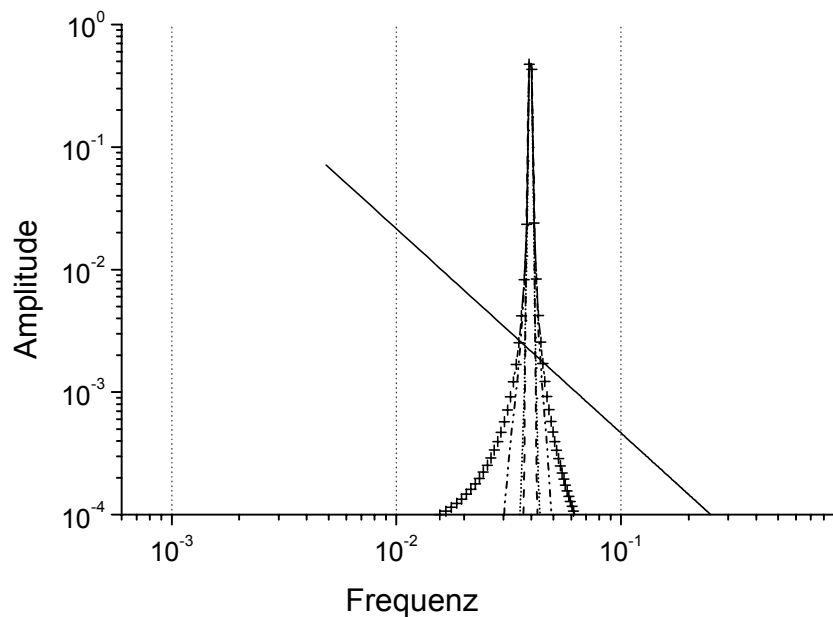
Wir haben eine Fouriertransformation (FFT Routine) benutzt, bei der die Reihengänge eine Zweierpotenz sein muß,  $L=2^N$ , mit  $N$  einer ganzen Zahl. Bei unseren Rechnungen haben wir  $L=1024$  also  $N=10$  gewählt. Die hier getroffenen Aussagen beschränken sich nicht auf die FFT, sondern sind allgemeingültig. In den Abbildungen 2a-2c sind die Ergebnisse für  $i=1, 4, 40$  dargestellt.



(a) Signal zwischen dem 1. und 2. Frequenzbin



(b) Signal zwischen dem 4. und 5. Frequenzbin



(c) Signal zwischen dem 40 und 41. Frequenzbin von insgesamt 512 Frequenzbins

Abb.2 Energiespektren mit Fensterfunktionen nach den Gleichungen (3) und (5)-(7). Ein Signal, dessen Frequenz zufällig zwischen zwei Frequenzbins liegt, wird auf benachbarten Bins abgebildet. Das Ziel der Fensterung ist es, diese Signale bei großem Offset, wo das Rechteck-Fenster starke Nebenzipfel hat, zu reduzieren. Zum Vergleich ist eine Gerade mit einem Anstieg von  $-5/3$  dargestellt.

Wie erwartet ist der Fenstereinfluß bei den niedrigen Frequenzen am größten. Es zeigt sich, daß für diesen Test das Hanning-Fenster eindeutig die besten Eigenschaften besitzt. Das Rechteckfenster bildet niederfrequente Sinusschwingungen auf alle Frequenzen mit einer relativ hohen Energiedichte ab, deren Abfall zu den hohen Frequenzen nur wenig stärker ist als der eingezeichnete  $(-5/3)$ -Abfall.

Die Energiedichte geophysikalischer Prozesse ist häufig bei niedrigen Frequenzen am größten und nimmt nach höheren Frequenzen bei einer doppeltlogarithmischen Darstellung häufig nach einem  $-5/3$  Gesetz gleichmäßig ab (rotes Rauschen, Turbulenz; Stull, 1988, S. 390 f.). Wir haben in den Abbildungen 2a-2c diese  $-5/3$  Linie mit eingezeichnet. Durch den Verzicht auf eine Fensterfunktion sind diese Spektren stark verfälscht und zeigen einen einheitlichen Abfall im hochfrequenten Bereich. Aber gerade dieser Abfall der Energie in diesem Bereich ist häufig Gegenstand der Untersuchung. Beim Sinus-Fenster und auch beim geglätteten Rechteckfenster ist dieser Effekt nicht so stark, wobei das geglättete Rechteckfenster in der Nähe der zu filternden Schwingung kaum besser ist als das Rechteckfenster. Bei größeren Abständen von der zu filternden Frequenz sind die „durchsickernden“ Amplituden sowieso recht klein, so daß das geglättete Rechteckfenster einen größeren Rechenaufwand bereitet, aber wenig Erfolg zeigt.

Betrachten wir den Fall  $i=4$ , d.h. die Testsinusreihen haben Frequenzen zwischen dem 4. und 5. Frequenzbin (siehe Abb. 2b). Das Hanning-Fenster hat auf dem 3. und 6. Frequenzbin noch die höchsten Energien mit  $1/10$  des Maximalwertes, aber beim 2. und 7. Frequenzbin ist die Energie auf drei Größenordnungen abgesunken. Das Rechteckfenster und des geglätteten Rechteckfenster liegen hier noch dicht beieinander und haben gerade 1,5 Größenordnungen

erreicht.

Man kann sich die Wirkung der Fenster am einfachsten veranschaulichen, wenn man in Gleichung (8)  $i=1$ ,  $R_1=0.5$ ,  $R_2=0$  einsetzt und die so entstehende Reihe periodisch fortführt. Ähnlich wie bei einer Sägezahnfunktion wird die entstandene Unstetigkeit durch hochfrequente Anteile im Spektrum repräsentiert. Die Multiplikation mit den entsprechenden Filtern schwächt diese Unstetigkeit ab. Der Leser wird sofort feststellen, daß im Fall  $R_1=0$  aber  $R_2$  beliebig, alle Filter das Ergebnis verschlechtern. Diese Fälle sind in den Abbildungen mit enthalten, sie sind genauso wahrscheinlich wie jede andere Phasenlage auch.

## 6. Diskussion

Das Hanning-Fenster hat zwei Vorteile: Es unterdrückt die nicht vorhandenen Frequenzen am stärksten, im Vergleich mit den anderen, hier betrachteten Fensterfunktionen und es ist einfach in der Anwendung (s.u.).

Die Multiplikation der Zeitreihe mit der Fensterfunktion erscheint etwas umständlich, darum wollen wir auf die zweite Möglichkeit der Anwendung hinweisen.

Gleichung (4) liefert ein Faltungsintegral im Frequenzraum, das in seiner praktischen Ausführung sehr einfach wird. Die Fouriertransformierte des Hanning-Fensters  $Q(v_i)$  hat in der diskreten Form die Werte:  $Q(v_{-1})=-0.25$ ,  $Q(v_0)=0.5$ ,  $Q(v_1)=-0.25$  und  $Q(v_i)=0$  für alle anderen Frequenzen. Damit ergibt sich die diskrete Rechenvorschrift für das Hanning-Fenster im Frequenzraum (analog dem Faltungsintegral in Gleichung (4) in Summenform) wegen  $Am(v_0)=0$  zu

$$\begin{aligned} Am(v_i) &= \frac{1}{4}(-Am'(v_{i-1}) + 2Am'(v_i) - Am'(v_{i+1})), \\ Am(v_1) &= \frac{1}{4}(2Am'(v_1) - Am'(v_2)), \\ Am(v_{\max}) &= \frac{1}{4}(-Am'(v_{\max-1}) + 2Am'(v_{\max})). \end{aligned} \tag{9}$$

Vergleicht man diese Formel mit der von Taubenheim (1969, S. 291) und Schönwiese (1992, S. 180) angegebenen, so stellt man fest, daß sie sich um ein Vorzeichen unterscheiden. Wir müssen uns dabei vor Augen halten, daß wir über die Zeitreihe ein Hanning-Fenster legen und nicht über die Autokorrelationsfunktion. Das Hanning-Fenster in Gleichung (7) und bei Taubenheim (1969, S. 291) und Schönwiese (1992, S. 179) unterscheiden sich ebenfalls um ein Vorzeichen. Gleichung (9) läßt sich sehr einfach in ein Tabellenkalkulationsprogramm einschließen, wenn das Programm eine Fouriertransformationsroutine anbietet.

Wie bei Schönwiese (1992, S. 183) diskutiert, können bei der Berechnung des Leistungsspektrums aus der Autokorrelationsfunktion numerische Instabilitäten auftreten. Man erkennt sie am Erscheinen negativer Energien. Im Gegensatz dazu bleibt das Spektrum stabil, wenn es direkt aus der Zeitreihe nach Gleichung (4) mit dem diskreten Fenster nach Gleichung (9) berechnet wird. Ursache hierfür ist die zweimalige Anwendung des Fensters, sowohl bei der Fouriertransformierten der Zeitreihe als auch beim konjugiert komplexen, so daß das Ergebnis immer reell und positiv ist. Dies ist auch bei der Normierung der Fenster zu beachten. Die Filter müssen so normiert sein, daß folgende Gleichung erfüllt ist und somit die Varianz nach der Transformation erhalten bleibt:

$$\sigma^2 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L M(t_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=-L/2+1}^{L/2} P(v_i). \tag{10}$$

Die Leistung berechnet sich aus den Effektivwerten der Amplituden (siehe auch Taubenheim, 1969, S. 225), so daß die einzelnen Filterkoeffizienten  $c_i$ , die sich nach Gleichungen (5)-(7) berechnen, die Bedingung erfüllen müssen:

$$\sum_{i=1}^L c_i^2 = 1. \quad (11)$$

Damit die hier vorgestellten Fenster Gleichung (11) erfüllen, sind sie mit folgenden Faktoren zu multiplizieren:

Rechteckfenster:	1
geglättetes Rechteckfenster:	1,06875
Sinusfenster:	$\sqrt{2}$
Hanning-Fenster:	$2\sqrt{2/3}$

Die unterschiedlichen Ergebnisse bei der Fouriertransformation mit Hanning-Fenster aus der Autokorrelationsfunktion und aus der direkten Transformation der Meßreihe sind kein Bruch des Wiener-Chintschin-Theorem (Taubenheim, 1969, S. 224) für einen Gaußschen Zufallsprozeß, sondern darauf zurückzuführen, daß das Hanning-Fenster unterschiedlich angewandt wird. Beide Betrachtungsweisen sind zwar äquivalent, aber im ersten Fall wirkt das Hanning-Fenster und im zweiten Fall das Quadrat des Hanning Fensters.

## 7. Programmalgorithmus zur spektralen Varianzanalyse

Hat man zwei Datensätze und berechnet die Fouriertransformierten, kann man mit Gleichung (4) auch das Kreuzspektrum, die Kohärenz und die Phase berechnen (Stull, 1988, S. 331), indem man den konjugiert komplexen Teil durch das konjugiert komplexe Spektrum der zweiten Reihe ersetzt. Nach einmaliger Durchführung dieser Transformation ist die Varianz des Spektrums auf dem Frequenzbin  $i$  überall gleich dem Quadrat des Erwartungswertes auf dieser Frequenz, die Standardabweichung gleich 100% (Press et al., 1992, S. 544-545). Die normierte Kohärenz nach Stull (1988, S. 332) ist nicht zufällig, sondern immer und auf allen Frequenzen gleich eins. Die Fakten bleiben bei Nichtanwendung eines Fensters die gleichen, wobei wir nochmals betonen, das Rechteckfenster wird in diesem Falle immer angewandt.

Die Probleme lassen sich relativ einfach lösen. Wir nehmen an, wir besitzen 10240 äquidistant erfaßte Daten. Diese Meßreihe wird in 10 gleiche Teile von 1024 geteilt und für jede Teilreihe die Fouriertransformation mit dem Hanning-Fenster durchgeführt. Es werden 10 Spektren berechnet. Sind mehrere Reihen vorhanden, werden auch die komplexen Kreuzspektren über diese 10 Teilreihen berechnet. Alle Spektren werden anschließend summiert und durch 10 dividiert (Press et al., 1992, S. 544-545). Das Ergebnis entspricht einem Spektrum, das aus einer Auto(Kreuz-)korrelationsfunktion mit einer maximalen Verschiebung von 10 berechnet wurde, also einem Freiheitsgrad von etwa 20 (siehe Taubenheim, 1969, S. 293). Aufbauend auf diesen Freiheitsgrad lassen sich die entsprechenden Signifikanztests durchführen, die Standardabweichung ist nicht mehr 100%, die aus dem gemittelten Kreuzspektrum und den Leistungsspektren berechnete normierte Kohärenz ist dann in der Regel kleiner als eins, zufällige Phasenlagen löschen sich in den Kreuzspektren aus. Auch hier und bei der berechneten Phase sind so entsprechende Signifikanztests möglich.

Den „Datenverlust“ bei der Filterung mit dem Hanning-Fenster kann man extrem verkleinern, indem man die Reihe in 19 Teile zu 1024 Werten aufteilt, die sich jeweils zu 512 Werte überlappen. Das oben gesagte wird auf diese 19 Teilreihen angewandt. Die heutige Rechenkapazität der PCs ist so gewaltig, daß man den Unterschied in der Rechenzeit kaum bemerkt.



Es sei aber noch darauf hingewiesen, daß sich der Freiheitsgrad durch diese Vorgehensweise nicht erhöht, sondern daß der Freiheitsgrad beim vorhergehenden Algorithmus, abhängig vom gewählten Fenster, eher kleiner als 20 ist. Das hier gewählte Zahlenbeispiel läßt sich sinngemäß auf alle in der Praxis vorkommenden Fälle übertragen.

## **8. Literatur**

Hamming, R.W., 1977: Digital Filters. - Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall  
Taubenheim, J., 1969: Statistische Auswertung geophysikalischer und meteorologischer Daten. – Leipzig : Akad. Verl.Ges.  
Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling und B. P. Flannery, 1992: Numerical Recipes in FORTRAN. The Art of Scientific Computing. - Second Edition. – Cambridge : Cambridge University Press  
Schönwiese, Ch., 1992: Praktische Statistik. – 2., verb. Aufl. – Berlin [u.a.] : Borntraeger  
Stull, R. B., 1988: An Introduction to Boundary Layer Meteorology. - Dordrecht : Kluwer Academic Publishers

## **9. Weiterführende Literatur**

Harris, F.J., 1978: On the use of windows for harmonic analysis with the discret Fourier transform. Proc. IEEE. 66. S. 51-83  
Nuttall, A.H., 1981: Some windows with very good sidelobe behaviour. IEEE Trans. Acoust., Speech, Sign. Proc. 29: S. 84-91

### **Anschriften der Verfasser:**

Dr. H.-J. Schönfeldt, S. von Löwis  
LIM - Institut für Meteorologie, Universität Leipzig  
Stephanstr. 3, 04103 Leipzig  
e-mail: schoenfeldt@uni-leipzig.de